Algebra

Rząd Macierzy

Alexander Denisjuk

denisjuk@pjwstk.edu.pl

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
zamiejscowy ośrodek dydaktyczny w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk
Rząd Macierzy

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://users.pjwstk.edu.pl/~denisjuk/
Macierze a układy równań liniowych

• Niech dana będzie macierz

\[
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm}
\end{pmatrix}.
\]

• W przestrzeni \( \mathbb{R}^n \) rozważmy otoczkę liniową \( V \) układu kolumn macierzy \( A \):

\[
V = \langle A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \right\rangle.
\]
Niech dany będzie wektor $b \in \mathbb{R}^n$. Pytanie: czy wektor $b$ należy do otoczki liniowej układu $\{ A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} \}$?

Czy istnieją współczynniki $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, takie że

$$
\begin{bmatrix}
  a_{11} \\
  a_{21} \\
  \vdots \\
  a_{n1}
\end{bmatrix} x_1 +
\begin{bmatrix}
  a_{12} \\
  a_{22} \\
  \vdots \\
  a_{n2}
\end{bmatrix} x_2 + \cdots +
\begin{bmatrix}
  a_{1m} \\
  a_{2m} \\
  \vdots \\
  a_{nm}
\end{bmatrix} x_m =
\begin{bmatrix}
  b_1 \\
  b_2 \\
  \vdots \\
  b_n
\end{bmatrix}
$$

czyli

$$
\begin{cases}
  a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\
  a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2, \\
  \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
  a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n.
\end{cases}
$$
Oznaczenia dla sumowania

- \( x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \)

- \( \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \)

- \( \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \)

- \( \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{i,j} a_{ij} \)
Definicja rzędu macierzy

Definicja 1. *Rzędem macierzy* $A$ nazywamy liczbę

$$\text{rank } A = \text{rank} \left\{ A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} \right\} = \text{dim} \langle A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} \rangle$$

Twierdzenie 2. rank $A$ nie zmienia się po elementarnych przekształceniach macierzy $A$.

Dowód.

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^{(i)} = 0 \iff \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A'^{(i)} = 0$$

□
Rząd macierzy według wierszy

**Definicja 3.** *Rzędem macierzy* $A$ *według wierszy nazywamy liczbę*

\[ \operatorname{rank}_w A = \operatorname{rank} \{ A(1), A(2), \ldots, A(m) \} = \dim \langle A(1), A(2), \ldots, A(m) \rangle \]

**Twierdzenie 4.** $\operatorname{rank}_w A = \operatorname{rank} A$

**Wniosek 5.** $\operatorname{rank} A^t = \operatorname{rank} A$

**Wniosek 6.** $\operatorname{rank} A$ *nie zmienia się po elementarnych przekształceniach kolumn macierzy*
Rząd macierzy a układ równań liniowych

Twierdzenie 7. Ilość głównych niewiadomych układu $Ax = b$ nie zależy od sposobu sprowadzenia macierzy do postaci schodkowej i zgadza się z rank $A$

Dowód.

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1m} \\
0 & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2l} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2m} \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{3l} & \ldots & a_{3s} & \ldots & a_{3m} \\
& & & & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{rs} & \ldots & a_{rm} \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
& & & & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}
$$
Twierdzenie Kroneckera-Capellego

**Twierdzenie 8** (Kronecker-Capelli). *Układ $Ax = b$ ma rozwiązanie $\iff \text{rank } A = \text{rank}(A|b)$*
Rząd iloczynu macierzy

**Twierdzenie 9.** \( \text{rank } AB \leq \min \{ \text{rank } A, \text{rank } B \} \)

**Dowód.**

- Niech \( C = AB \)
- Dla wierszy \( C(i) \) i kolumn \( C(j) \) macierzy \( C \):
  \[ C(i) = A(i)B, \quad C(j) = AB(j). \]
- Niech \( r_1 = \text{rank } A \) oraz \( A(1), \ldots, A(r_1) \) będą bazowymi
- \( A(k) = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki} A(i) \) dla \( r_1 < k \leq n \)
- Więc \( C(k) = A(k)B = \left( \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki} A(i) \right) B = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki} \left( A(i)B \right) = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki} C(i) \) dla \( r_1 < k \leq n \)
- \( \langle C(1), \ldots, C(n) \rangle = \langle C(1), \ldots, C(r_1) \rangle \)
- \( \text{rank } C \leq r_1 \)
Twierdzenie 10. \( \text{rank } AB \leq \min \{ \text{rank } A, \text{rank } B \} \)

Dowód. cd.

- Analogicznie dla \( B \)
  - Niech \( r_2 = \text{rank } B \) oraz \( B^{(1)}, \ldots, B^{(r_2)} \) będą bazowymi
  - \( B^{(k)} = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_{kj} B^{(j)} \) dla \( r_2 < k \leq m \)
  - Więc \( C^{(k)} = AB^{(k)} = A \left( \sum_{j=1}^{r_2} \mu_{kj} B^{(j)} \right) = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_{kj} (AB^{(j)}) = \sum_{i=1}^{r_2} \mu_{kj} C^{(j)} \) dla \( r_2 < k \leq n \)
  - \( \langle C^{(1)}, \ldots, C^{(m)} \rangle = \langle C^{(1)}, \ldots, C^{(r_2)} \rangle \)
  - \( \text{rank } C \leq r_2 \)

\( \Box \)
Macierze kwadratowe

- $M_n(\mathbb{R}^n) = M_n$ zbiór macierzy kwadratowych $n \times n$
- $I \in M_n$ macierz jednostkowa

- elementy macierzy jednostkowej $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i = j, \\ 0, & \text{jeżeli } i \neq j \end{cases}$ (symbol Kroneckera)

- $\forall A \in M_n$, $AI = IA = A$
- $I(\lambda) = \lambda I$ macierz skalarna
- $\forall A \in M_n$, $AI(\lambda) = I(\lambda)A = A$

Twierdzenie 11. Niech $Z \in M_n$ praz $\forall A \in M_n$, $AZ =ZA$. Wtedy $Z = I(\lambda)$.

Dowód. $E_{ij}$
Macierz nieosobliwa

Definicja 12. • Macierz $A \in M_n$ jest nieosobliwą, jeżeli $\text{rank } A = n$.
• Macierz $A \in M_n$ jest odwracalną, jeżeli istnieje $A^{-1}$ ($AA^{-1} = I$).

Twierdzenie 13. Macierz jest odwracalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwą

Dowód. 1. $n = \text{rank } I = \text{rank } A^{-1}A \leq \text{rank } A$

2. (a) $\mathbb{R}^n = \langle E^{(1)}, \ldots E^{(n)} \rangle = \langle A^{(1)}, \ldots A^{(n)} \rangle$

(b) $E^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} a'_{ji} A^{(i)}$

(c) $I = AA'$

Wniosek 14. Niech $A \in M_n$ będzie macierzą nieosobliwą. Wtedy $A^t$ też jest macierzą nieosobliwą oraz $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. 
Mnożenie przez macierz nieosobliwą

**Twierdzenie 15.** Niech \( B \) i \( C \) będą macierzami nieosobliwymi względnie \( m \times m \) oraz \( n \times n \). Wtedy dla dowolnej \( m \times n \) macierzy \( A \)

\[
\text{rank } BAC = \text{rank } A
\]

**Dowód.** \( \text{rank } BAC \leq \text{rank } BA = \text{rank } BA(CC^{-1}) = \text{rank}(BAC)C^{-1} \leq BAC \)

**Wniosek 16.** Niech \( A, B \in M_n \) oraz \( AB = I \) (lub \( BA = I \)). Wtedy \( B = A^{-1} \).

**Wniosek 17.** Niech \( A, B, \ldots, C, D \in M_n \) będą nieosobliwe. Wtedy \( AB \ldots CD \) też będzie macierzą nieosobliwą, oraz

\[
(AB \ldots CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1} \ldots B^{-1}A^{-1}
\]
Macierze elementarne — $F_{s,t}$

- $F_{s,t} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 \\
\end{pmatrix}$, $s \neq t$

- $F_{s,t} = I - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts}$

- $F_{s,t}A \iff$ zamiana wierszy $A(s)$ i $A(t)$
Macierze elementarne — $F_{s,t}(\lambda)$

- $F_{s,t}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \lambda \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $s \neq t$

- $F_{s,t}(\lambda) = I + \lambda E_{st}$

- $F_{s,t}(\lambda)A \iff A(s) \sim A(s) + \lambda A(t)$
Macierze elementarne — $F_s(\lambda)$

- $F_s(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$
- $F_s(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ss}$
- $F_s(\lambda)A \iff A_{(s)} \sim \lambda A_{(s)}$
Twierdzenie 18. Niech \( A \in M_n \) będzie nieosobliwą. Wtedy za pomocą przekształceń elementarnych \( A \) można sprowadzić do postaci macierzy jednostkowej.

Dowód. 1. Sprowadzamy do postaci schodkowej
    
2. Sprowadzamy do postaci jednostkowej

Wniosek 19. Niech \( A \in M_n \) będzie nieosobliwą. Wtedy za pomocą mnożenia przed macierze elementarne \( A \) można sprowadzić do postaci macierzy jednostkowej:

\[
I = P_k \ldots P_1 A,
\]

gdzie \( P_1, \ldots, P_k \) — są macierze elementarne.

Wniosek 20.

\[
P_k \ldots P_1 = A^{-1}
\]
Obliczenie macierzy odwrotnej

\[(A|I) \xrightarrow{P_1} (P_1 A|P_1) \xrightarrow{P_2} (P_2 P_1 A|P_2 P_1) \xrightarrow{\ldots} \ldots \xrightarrow{P_k} (P_k \ldots P_2 P_1 A|P_k \ldots P_2 P_1) = (I|A^{-1})\]

Przykład 21.

1. \[
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 \\
1 & 1 & -1 \\
2 & 1 & -1
\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 1 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -2 & 1
\end{pmatrix}
\]

2. \[
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}
-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}
\end{pmatrix}
\]